৫২

B(3rd Sm.)-Mathematics-H/MN-1/CCF

2024

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) $f'(0)$-এর মান নির্ণয় করো যদি অস্তিত্ব থাকে, যেখানে $f(x) = \begin{cases} 3 + 2x, & -\frac{3}{2} < x \le 0 \\ 3 - 2x, & 0 \le x < \frac{3}{2} \end{cases}$.

(খ) যদি $y = \tan^{-1}x$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n - 1)y_{n-1} = 0.$

(গ) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim\limits_{x \to 1}\left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log_e x}\right]$

(ঘ) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ -এর reduction formula ব্যবহার করে $\int_0^1 \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় করো।

(চ) $y = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = 2x$ রেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ছ) $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা এবং $x = 1, x = 4$ রেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রটিকে x-অক্ষের চারপাশে ঘূর্ণন সৃষ্ট পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) যদি $y = (\sin^{-1}x)^2$ হয়, দেখাও যে $(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0.$ ৪

(খ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + x - 1} \right)$ -এর মান নির্ণয় করো। ৪

(গ) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ -এর reduction সূত্র নির্ণয় করো । এর সাহায্যে $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x\, dx$ -এর মান নির্ণয় করো। ২+২

(ঘ) নিম্নলিখিত সমীকরণটির প্রকৃত বক্র দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো ঃ
$x = a\cos^3\phi,\ y = a\sin^3\phi.$ ৪

(ঙ) x-অক্ষকে অক্ষ করে $y = 5x - x^2$, y-*axis* এবং $x = 5$ ক্ষেত্রটির ঘূর্ণন সৃষ্ট solid-এর আয়তন নির্ণয় করো। ৪

(চ) $\int x^n\, e^{ax}\, dx$ -এর রিডাকশন ফর্মুলা বার করো এবং এর সাহায্যে $\int x^3\, e^{2x}\, dx$ -এর মান নির্ণয় করো। ৪

বিভাগ - খ
[Geometry]
(Marks : 35)

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) এমনভাবে অক্ষদ্বয়কে সমান্তরাল স্থানান্তর করো যাতে $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$ সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপটি $x'^2 + y'^2 = 37$ হয়।

(খ) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$ বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো, যেটি $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখার সাথে সমান্তরাল হবে।

(গ) $r = 8\sin(\theta - \pi/3)$ বৃত্তটির কেন্দ্রের মেরুস্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(ঘ) 'a' এর কোন্ মানের জন্য $x + y + z = \sqrt{3}a$ তলটি $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$ গোলকটির স্পর্শক হবে।

৪। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো। ৬

(খ) একটি সরলরেখা $x^2 + y^2 = 2a^2$ এবং $y^2 = 8ax$ উভয়কে স্পর্শ করে। উহার সমীকরণটি নির্ণয় করো। ৬

(গ) যদি একটি conic-এর দুটি পরস্পর লম্ব focal chord দ্বয় PSP' এবং QSQ' হয়, যে conic-টির নাভি হল S. প্রমাণ করো $\left(\frac{1}{SP.SP'}+\frac{1}{SQ.SQ'}\right)$ ধ্রুবক। ৬

(ঘ) একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করো যেটি (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) বিন্দুগামী এবং $2x + 2y - z = 15$ তলটিকে স্পর্শ করে। ৬

(ঙ) একটি লম্ববৃত্তীয় চোঙের সমীকরণ নির্ণয় করো যেটির ব্যাসার্ধ 5 একক এবং যার অক্ষ (1, 2, 3) বিন্দুগামী এবং $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$ সরলরেখার সমান্তরাল। ৬

(চ) $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4x + 20y - 6z - 5 = 0$ surface-এর প্রকৃতি নির্ণয় করো। এবং surface-টির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং মুখ্যতলের (Principal Plane) সমীকরণ নির্ণয় করো। ৩+১+২

(ছ) দেখাও যে তিনটি অক্ষ এবং $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$ এবং $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ সরলরেখা দুটি দিয়ে তৈরি শঙ্কুর সমীকরণটি হবে $3yz + 10zx + 6xy = 0$. ৬

(জ) $x^2 - y^2 = 2z$ এই hyperbolic paraboloid-এর generating সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করো, যেটি (5, 3, 8) বিন্দুগামী। ৬

(ঝ) একটি নলের সমীকরণ নির্ণয় করো যার generator গুলি $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং guiding curve $x^2 + y^2 = 9, z = 1$. ৬

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) λ-এর সকল সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো, যার জন্য ভেক্টর $\vec{\alpha}=\lambda\left(2\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}\right)$ একটি unit ভেক্টর হবে।

(খ) যদি $|\vec{\alpha}|=4, |\vec{\beta}|=5$ এবং $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ হয়, $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|$-এর মান নির্ণয় করো।

(গ) (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1) এবং (1, 1, 1) বিন্দুগামী টেট্রাহেড্রনের আয়তন ভেক্টর পদ্ধতিতে নির্ণয় করো ।

(ঘ) $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{c}=3\hat{i}+p\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একতলীয় হলে, p-ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করো।

(ঙ) $4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ বল দুটি একটি বস্তুর উপর প্রয়োগের ফলে বস্তুটি (1, 2, 3) বিন্দু থেকে (5, 4, –1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হল। কার্য (work done) নির্ণয় করো।

(চ) $5\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ বলটি (1, –2, 2) বিন্দুটির ওপর প্রয়োগ করা হলে মূল বিন্দুকে কেন্দ্র করে বলটির moment নির্ণয় করো।

(ছ) যদি $\vec{F}=5t^2\hat{i}+t\hat{j}-t^3\hat{k}$ এবং $\vec{G}=\sin t\,\hat{i}-\cos t\,\hat{j}$ হয়, তাহলে $\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

৬। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) যদি $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ হয়, প্রমাণ করো $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$. ৪

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে একটি rhombus-এর কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে। ৪

(গ) প্রমাণ করো যে, $\vec{a}(t)$-এর পরম মান ধ্রুবক হওয়ার necessary and sufficient শর্ত হল $\vec{a}.\frac{d\vec{a}}{dt}=0.$ ৪

(ঘ) (অ) যদি $\vec{r}=(\cos nt)\hat{i}+(\sin nt)\hat{j}$, যেখানে n একটি ধ্রুবক এবং t একটি চলরাশি, তাহলে দেখাও যে,

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=n\hat{k}.$$

(আ) যদি $\vec{u}=t^2\hat{i}-t\hat{j}+(2t+1)\hat{k}$ এবং $\vec{v}=(2t-3)\hat{i}+\hat{j}-t\hat{k}$ হয়, তাহলে দেখাও যে $t=1$ বিন্দুতে,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=7\hat{j}+3\hat{k}.$$ ২+২

(ঙ) $\left(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)$ এবং $\left(3\hat{k}-2\hat{j}\right)$ বিন্দু দুটি দিয়ে একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো। ৪

(চ) $\int_2^3\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right)dt$-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{r}(t)=t^3\hat{i}+2t^2\hat{j}+3t\hat{k}$. ৪

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer *any four* questions : 2×4

(a) Find $f'(0)$, if it exists, for $f(x) = \begin{cases} 3+2x, & -\frac{3}{2} < x \le 0 \\ 3-2x, & 0 \le x < \frac{3}{2} \end{cases}$

(b) If $y = \tan^{-1}x$, then show that, $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$.

(c) Evaluate the limit : $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log_e x} \right]$

(d) Using the reduction formula for $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, evaluate $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(e) Find the length of the circumference of the circle $x^2 + y^2 = 25$.

(f) Find the area of the region bounded by the curve $y = x^3$ and the line $y = 2x$.

(g) Find the surface area generated by revolving the region enclosed by the curve $y = \sqrt{x}$ and the lines $x = 1$, $x = 4$ about x-axis.

2. Answer *any three* questions :

(a) If $y = (\sin^{-1}x)^2$, then show that $(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$. 4

(b) Evaluate $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + x - 1} \right)$. 4

(c) Find the reduction formula for $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, where n is a positive integer, hence, find the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \, dx$. 2+2

Please Turn Over

(d) Find the exact arc length of the curve given by the equations :

$x = a\cos^3\phi,\ y = a\sin^3\phi.$ 4

(e) Find the volume of the solid of revolution generated by the region enclosed by $y = 5x - x^2$, y-axis and $x = 5$ about x-axis. 4

(f) Derive the reduction formula for $\int x^n e^{ax}\,dx$ and hence, evaluate $\int x^3 e^{2x}\,dx$. 4

Group - B

[Geometry]

(Marks : 35)

3. Answer *any two* questions : 2½×2

(a) Obtain the parallel displacement at the axes by which the equation $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$ is transformed to $x'^2 + y'^2 = 37$.

(b) Find the equations at the tangents to the circle $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$ which are parallel to the line $4x + 3y + 5 = 0$.

(c) Find the polar coordinates at the centre and radius of the circle : $r = 8\sin(\theta - \pi/3)$.

(d) Find the value of 'a' for which the plane $x + y + z = \sqrt{3}a$ touches the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0.$$

4. Answer *any five* questions :

(a) Reduce the equation $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$ to its canonical form and hence, determine the nature of the conic. 6

(b) A straight line touches both $x^2 + y^2 = 2a^2$ and $y^2 = 8ax$. Find its equation. 6

(c) If PSP' and QSQ' be two perpendicular focal chords of a conic with focus S, then prove that $\left(\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'}\right)$ is constant. 6

(d) Find the equation of the sphere which passes through the points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) and which touches the plane $2x + 2y - z = 15$. 6

(e) The radius of a right circular cylinder is 5, axis passes through the point (1, 2, 3) and is parallel to the straight line $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$; find the equation of the cylinder. 6

(f) Find the nature of the surface represented by the equation

$$2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4x + 20y - 6z - 5 = 0.$$

Find also, the coordinates of the centre and equations of principal planes. 3+1+2

(g) Show that the equation of the cone which passes through the coordinate axes and the straight lines $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ is $3yz + 10zx + 6xy = 0$. 6

(h) Find the equations at the generators of the hyperboloid $x^2 - y^2 = 2z$ which passes through the point (5, 3, 8). 6

(i) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the straight line $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is $x^2 + y^2 = 9, z = 1$. 6

Group - C

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

5. Answer *any four* questions : 2×4

(a) Determine all possible values of λ for which the vector $\vec{\alpha} = \lambda\left(2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)$ is a unit vector.

(b) If $\left|\vec{\alpha}\right| = 4$, $\left|\vec{\beta}\right| = 5$ and $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$, find $\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|$.

(c) Find, by vector method, the volume of the tetrahedron whose vertices are (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1) and (1, 1, 1).

(d) Find the value of p so that the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 5\hat{k}$ are coplanar.

(e) A particle being acted on by constant forces $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ is displaced from the point (1, 2, 3) to the point (5, 4, –1). Find the total work done.

(f) A force $5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ is applied at the point (1, –2, 2). Find the value of the moment of the force about the origin.

(g) If $\vec{F} = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ and $\vec{G} = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$, find $\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$.

6. Answer *any three* questions :

(a) If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, then prove that $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$. 4

(b) Prove by vector method that the diagonals of a rhombus are perpendicular to each other. 4

(c) Prove that a necessary and sufficient condition for the vector function $\vec{a}(t)$ to have constant magnitude is $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$. 4

(d) (i) If $\vec{r} = (\cos nt)\hat{i} + (\sin nt)\hat{j}$, where n is a constant and t varies, then show that $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = n\hat{k}$.

(ii) If $\vec{u} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ and $\vec{v} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, then show that $\frac{d}{dt}\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = 7\hat{j} + 3\hat{k}$ at $t = 1$. 2+2

(e) Derive the vector equation of the straight line passing through the points $\left(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right)$ and $\left(3\hat{k} - 2\hat{j}\right)$. 4

(f) Evaluate $\int_2^3 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right) dt$, where $\vec{r}(t) = t^3\hat{i} + 2t^2\hat{j} + 3t\hat{k}$. 4